

## CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTABELECIMENTO DE UM FACTOR DE MAJORAÇÃO PARA A FÓRMULA RACIONAL

João Reis HIPÓLITO

Eng. Civil, Prof. Associado Agregado do IST, [jh@civil.ist.utl.pt](mailto:jh@civil.ist.utl.pt)

Emídio Gil SANTOS

Eng. Civil, Prof. Associado do IST, [emidio@civil.ist.utl.pt](mailto:emidio@civil.ist.utl.pt)

Maria Manuela PORTELA

Eng. Civil, Prof. Auxiliar do IST, [mgs@civil.ist.utl.pt](mailto:mgs@civil.ist.utl.pt)

### RESUMO

A fórmula racional tem larga utilização na determinação de caudais de ponta de cheia em pequenas bacias hidrográficas para dimensionamento de órgãos de descarga ou de drenagem de águas pluviais. Na sua aplicação considera-se uma intensidade de precipitação que se mantém constante ao longo do tempo de concentração da bacia hidrográfica, tempo que se adopta para duração da precipitação.

Quando se considera que a distribuição temporal da precipitação não é uniforme e se constroem hietogramas de projecto com base no método dos blocos contíguos e nas linhas de possibilidade udométrica e se determina o hidrograma de projecto através da teoria do hidrograma unitário, obtêm-se caudais de ponta de cheia de valor superior aos que se obteriam utilizando uma precipitação com distribuição temporal uniforme.

Nesta comunicação, descreve-se o factor de majoração que se obteve por recurso à análise combinatória:

$$f = 2 - \sqrt{n}$$

onde f representa o referido factor e n, o expoente da linha de possibilidade udométrica ( $P = at^n$ ).

**Palavras-chave:** Caudal de ponta de cheia, fórmula racional, hidrograma unitário, linha de possibilidade udométrica, factor de majoração da fórmula racional.

# 1 INTRODUÇÃO

A fórmula racional, com origem tradicionalmente atribuída a MULVANEY em meados do Séc. XIX (SHAW, 1988, p 296), pode escrever-se

$$Q = CIA \quad (1)$$

onde

A representa a área da bacia hidrográfica ( $m^2$ ),

I, a intensidade média da precipitação, uniformemente distribuída em área, com duração igual ao tempo de concentração da bacia hidrográfica e determinado período de retorno (m/s),

C, um coeficiente que depende das características superficiais da bacia hidrográfica (permeabilidade, declive, retenção e detenção superficiais), do uso do solo (que as pode alterar) e do referido período de retorno (-) e

Q, o caudal de ponta de cheia para esse período de retorno ( $m^3/s$ ).

O produto IA corresponde ao caudal entrado na bacia hidrográfica e, de acordo com o princípio de conservação da massa, mantendo-se constante pelo menos até ao tempo de concentração da bacia hidrográfica, quando não houvesse perdas, a partir desse tempo e enquanto durasse a precipitação, seria igual ao caudal saído na secção de referência. O referido caudal seria então o caudal máximo para essa precipitação.

Quando existem perdas, é necessário multiplicar o referido produto por um factor (C), em geral considerado inferior à unidade (CHOW *et al.*, 1988, p 497; QUINTELA, 1996, p 10.31).

Na abordagem probabilística, actualmente em uso generalizado na Austrália, o coeficiente C pode assumir em algumas regiões valores superiores à unidade (PILGRIM, 1987, p 9; PILGRIM *et al.*, 1993, p 9.18).

Nesta comunicação, descreve-se o factor de majoração da fórmula racional que se obteve utilizando a teoria do hidrograma unitário, o conceito base das linhas de possibilidade udométrica e a análise combinatória.

## 2 FORMALISMO

Na teoria do hidrograma unitário, o hidrograma do escoamento directo é obtido da convolução discreta da precipitação efectiva que o origina com o hidrograma unitário da respectiva bacia hidrográfica

$$q_k = \sum_{i=1}^{\min(k,M)} p_i u_{k-i+1} \quad (2)$$

onde, com discretização em intervalos de tempo  $\Delta t$ ,

$q_k$  representa o caudal do escoamento directo ( $m^3/s$ ),

$p_i$ , a precipitação efectiva (mm) e

$u_j$ , o hidrograma unitário ( $m^3/s/mm$ ).

Considerando que o efeito das perdas é traduzido pela taxa constante que corresponde ao coeficiente C da fórmula racional, então a precipitação a considerar pode ser a precipitação total.

Na expressão anterior, o número de blocos de precipitação é M,  $i=1, \dots, M$ , o número de ordenadas não nulas do hidrograma unitário é N,  $j=1, \dots, N$ , com  $j=k-i+1$ , e o número de ordenadas não nulas do hidrograma do escoamento directo é L,  $k=1, \dots, L$ . Evidentemente, será  $L=M+N-1$ .

Nestas condições, o número máximo de parcelas na Eq. (2) é o mínimo de M e N e, para determinados M blocos de precipitação sem distribuição temporal especificada, o caudal máximo dos máximos caudais do escoamento directo resultantes das possíveis permutações dos blocos de precipitação será

$$\max q_{(1)} = \sum_{i=1}^{\min(M,N)} p_{(i)} u_{(i)} \quad (3)$$

onde

(i) representa o número de ordem não crescente do bloco de precipitação ou da ordenada do hidrograma unitário ou do caudal do escoamento directo, e corresponde a uma distribuição temporal dos números de ordem dos blocos de precipitação que, grosso modo, é simétrica da distribuição temporal dos números de ordem das ordenadas do hidrograma unitário em torno do número de ordem 1 (ordenada máxima do hidrograma unitário).  
Suponha-se que determinado hidrograma unitário, unimodal,  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{\xi-1}, u_{\xi}, u_{\xi+1}, \dots, u_{N-1}, u_N$ , corresponde na mesma ordem temporal a  $u_{(N)}, u_{(N-2)}, \dots, u_{(3)}, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(N-3)}, u_{(N-1)}$ , ou seja, o valor mais pequeno tem o índice temporal 1,  $u_1 = u_{(N)}$ , o terceiro valor mais pequeno tem o índice temporal 2,  $u_2 = u_{(N-2)}$ , e assim sucessivamente. Então, se  $M=N$ , a precipitação que maximiza o caudal de ponta do escoamento directo terá a seguinte distribuição temporal,  $p_{(N-1)}, p_{(N-3)}, \dots, p_{(2)}, p_{(1)}, p_{(3)}, \dots, p_{(N-2)}, p_{(N)}$ ; se  $M < N$ , a distribuição temporal dos números de ordem dos blocos da precipitação será simétrica da distribuição temporal dos  $M$  mais pequenos números de ordem das ordenadas do hidrograma unitário, em torno da maior ordenada; se  $M > N$ , então, é apenas necessário manter a ordem temporal dos  $N$  maiores blocos da precipitação, tal como se referiu para  $M=N$ , podendo colocar-se os outros  $M-N$  blocos arbitrariamente dum lado ou doutro dos  $N$  maiores blocos.  
A distribuição temporal acima referida, como se ilustra na Figura 1 para  $M=N=8$ , pode não ser de blocos alternados.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$u'_i = \frac{u_i}{u_{(1)}}$	0.50	0.78	0.92	1.00	0.60	0.40	0.20	0.08

(i)	1	2	3	4	5	6	7	8
$p'_{(i)} = \frac{p_{(i)}}{\sum_{i=1}^8 p_{(i)}}$	0.353	0.146	0.112	0.095	0.083	0.075	0.069	0.065

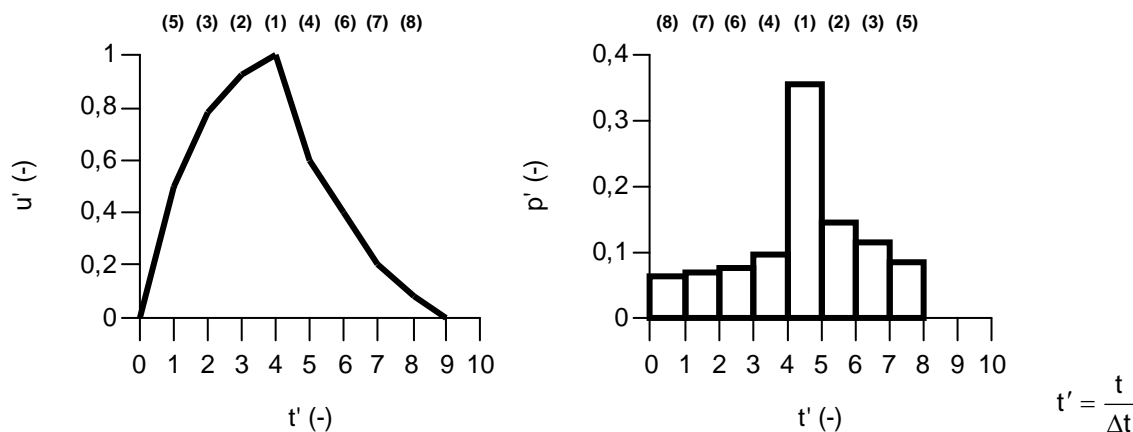


Figura 1 - Distribuição temporal da precipitação que maximiza o caudal de ponta de cheia.

Se o hidrograma unitário apresentar ordenadas iguais, então, os blocos de precipitação com índices temporais iguais aos das ordenadas iguais podem ser permutados sem que tal conduza a uma variação no máximo caudal de ponta de cheia.

O índice temporal do máximo caudal de ponta de cheia ( $\zeta=k_{(1)}$ ), caudal definido pela Eq. (3), obtém-se adicionando o índice temporal do maior bloco de precipitação ( $\eta$ ) ao índice temporal da maior ordenada do hidrograma unitário ( $\xi$ ) e subtraindo 1,

$$\zeta = \eta + \xi - 1 \quad (4)$$

Se  $M=N$ , então esse índice será  $\zeta=(N-\xi+1)+(\xi)-1=N$ , que como se esperaria corresponde ao tempo de concentração da bacia hidrográfica,  $t_c=N \Delta t$ .

A Eq. (3) mostra ainda que, para os determinados  $M$  blocos de precipitação sem distribuição temporal especificada, o máximo caudal de ponta de cheia ocorrerá quando  $M \geq N$  e o seu valor é

$$\max q_{(1)} = \sum_{i=1}^N p_{(i)} u_{(i)} \quad (5)$$

Quando se utiliza o conceito base das linhas de possibilidade udométrica para definir os blocos de precipitação, para cada período de retorno ( $T$ ) e cada duração da precipitação ( $t$ ), tem-se

$$P = a t^n \quad (6)$$

onde

$P$  representa a precipitação com duração  $t$  e período de retorno  $T$  e  
 $a$  e  $n$  são parâmetros dependentes da região e do período de retorno.

Os blocos de precipitação com duração  $\Delta t$ , que deverão ser contíguos, cada bloco adjacente aos de número de ordem inferior, obtém-se então do seguinte modo, quando  $n$  for constante de  $\Delta t$  a  $M \Delta t$ ,

$$\begin{aligned} p_{(1)} &= a(\Delta t)^n \\ p_{(2)} &= a(2 \Delta t)^n - p_{(1)} \\ &\vdots \\ p_{(M)} &= a(M \Delta t)^n - \sum_{i=1}^{M-1} p_{(i)} \end{aligned} \quad (7)$$

Faz-se notar que mantendo-se a contiguidade, o número de permutações admissíveis no domínio temporal é  $2^{M-1}$  e que numa dada região, para cada período de retorno e para o mesmo  $\Delta t$ , qualquer que seja a duração total da precipitação, os maiores blocos têm o mesmo valor, isto é, por exemplo, se  $M=3$ , então as precipitações em cada bloco são  $p_{(1)}, p_{(2)}$  e  $p_{(3)}$ , se  $M=5$ , então as precipitações em cada bloco são  $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}, p_{(4)}$  e  $p_{(5)}$ , se  $M=N$ , então as precipitações em cada bloco são  $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}, p_{(4)}, p_{(5)}, \dots, p_{(N)}$ . Por outras palavras o valor de cada bloco só depende de  $\Delta t$  e não depende de  $M$ . Compreende-se assim que, utilizando o conceito base das linhas de possibilidade udométrica, o valor máximo dos caudais de ponta de cheia para um dado  $\Delta t$  é atingido com  $M \geq N$ , fazendo sentido que se considere que a duração crítica da precipitação seja o tempo de concentração da bacia hidrográfica.

A precipitação com duração igual ao tempo de concentração da bacia hidrográfica e dado período de retorno designa-se por precipitação crítica ( $P_c$ ) para esse período de retorno, será

$$P_c = a t_c^n = \sum_{i=1}^N p_{(i)} = \sum_{i=1}^N p_i \quad (8)$$

onde os blocos  $p_{(i)}$  são definidos pela Eq. (7).

A intensidade média que se utiliza na Eq. (1) será então

$$I = \frac{P_c}{t_c} = a t_c^{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i}{N \Delta t} = \frac{\bar{p}}{\Delta t} \quad (9)$$

onde  $\bar{p}$  representa a média dos  $N$  blocos de precipitação.

As variáveis intervenientes na Eq. (2) podem ser adimensionalizadas do seguinte modo

$$\begin{aligned} p'_i &= \frac{P_i}{P_c} \\ u'_i &= \frac{u_i}{u_{(1)}} \\ q'_i &= \frac{q_i}{P_c u_{(1)}} \end{aligned} \quad (10)$$

resultando da referida Eq. (2)

$$q'_k = \sum_{i=1}^{\min(k,M)} p'_i u'_{k-i+1} \quad (11)$$

das Eq. (7), para a duração crítica da precipitação,

$$\begin{aligned} p'_{(1)} &= \left(\frac{1}{N}\right)^n \\ p'_{(2)} &= \left(\frac{2}{N}\right)^n - p'_{(1)} \\ &\vdots \\ p'_{(N)} &= 1 - \sum_{i=1}^{N-1} p'_{(i)} \end{aligned} \quad (12)$$

e da Eq. (5)

$$\max q'_{(1)} = \sum_{i=1}^N p'_{(i)} u'_{(i)} \quad (13)$$

Cabe aqui lembrar que na teoria do hidrograma unitário o volume de precipitação efectiva é igual ao volume de escoamento directo e, então, para 1 mm de precipitação, será

$$0,001 A = \Delta t \sum_{i=1}^N u_i \quad (14)$$

de onde resulta, com  $P_c$  em mm,

$$1 A = \frac{P_c}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (15)$$

Considerando um hidrograma unitário triangular, será

$$0,001 A = \frac{1}{2} u_{(1)} (N+1) \Delta t \quad (16)$$

e das Eq. (14) e (16) obtém-se

$$u_{(1)} = \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N u_i \quad (17)$$

Assim, designando por  $f$  a relação entre o máximo dos caudais de ponta de cheia para a precipitação não uniforme e o caudal de ponta de cheia para a precipitação uniforme obtém-se

$$f = \frac{\max q_{(1)}}{IA} = \frac{2 N}{N+1} \max q'_{(1)} \quad (18)$$

Como acima se referiu, considerando que  $C$  traduz o efeito das perdas para o caudal de ponta de cheia, então,  $f$  será também o factor de majoração da fórmula racional para distribuições temporalmente não uniformes da precipitação. Nestas condições, a referida fórmula passará a ser escrita

$$Q = f CIA \quad (19)$$

### 3 APLICAÇÃO E RESULTADOS

Na aplicação do formalismo anteriormente descrito consideraram-se hidrogramas unitários triangulares adimensionalizados com várias discretizações ( $\Delta t = \frac{t_c}{N}$ ) e com máximos localizados em todas as

posições temporais de ordenadas não nulas ( $i [u'_{(i)}] = 1, \dots, N$ ) que se designaram  $HU_i$ . Se o máximo estava na primeira ordenada não nula designava-se  $HU_1$ , se estava na segunda ordenada não nula,  $HU_2$ , e assim sucessivamente. Consideraram-se também expoentes da linha de possibilidade udométrica,  $n$ , a variarem entre 0.1 e 1.0.

No Quadro 1, a título de exemplo, apresentam-se os valores de  $f = f(n, N, HU_i)$  que se obtiveram para  $n=0.5$ ,  $N$  a variar da 4 a 20 e  $HU_i$  a variar de  $HU_1$  a  $HU_N$ .

Quadro 1 - Valores de  $f=f(0.5, N, HU_i)$

N	HU <sub>1</sub>	HU <sub>2</sub>	HU <sub>3</sub>	HU <sub>4</sub>	HU <sub>5</sub>	HU <sub>6</sub>	HU <sub>7</sub>	HU <sub>8</sub>	HU <sub>9</sub>	HU <sub>10</sub>	HU <sub>11</sub>	HU <sub>12</sub>	HU <sub>13</sub>	HU <sub>14</sub>	HU <sub>15</sub>	HU <sub>16</sub>	HU <sub>17</sub>	HU <sub>18</sub>	HU <sub>19</sub>	HU <sub>20</sub>
4	1.23	1.22	1.22	1.23																
5	1.25	1.24	1.23	1.24	1.25															
6	1.26	1.25	1.25	1.25	1.25	1.26														
7	1.27	1.27	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27													
8	1.28	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.28												
9	1.29	1.28	1.28	1.28	1.27	1.28	1.28	1.28	1.29											
10	1.29	1.29	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.29	1.29										
11	1.30	1.29	1.29	1.29	1.29	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.30									
12	1.30	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.30								
13	1.30	1.30	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.30	1.30							
14	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30						
15	1.31	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31					
16	1.31	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31				
17	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31			
18	1.31	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31		
19	1.31	1.31	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31	1.31	
20	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31

Pode observar-se que para cada discretização ( $N=\text{constante}$ ) o valor de  $f$  é aproximadamente constante o que significa que o posicionamento da ponta do hidrograma unitário pouco influencia o factor de majoração. Quando a discretização se torna mais fina ( $N$  crescente), o valor de  $f$  aumenta ligeiramente. Estas observações mantêm-se para os restantes valores de  $n$ .

No Quadro 2, para cada valor de  $n$ , apresentam-se os valores correspondentes do máximo de  $f$  ( $f_{\max}$ ), da média de  $f$  ( $f_{\text{med}}$ ) e do mínimo de  $f$  ( $f_{\min}$ ), quando os de  $N$  e os  $HU_i$  variam como no Quadro 1.

Quadro 2 - Valores máximos, médios e mínimos de  $f=f(n, N, HU_i)$

n	$f_{\max}$	$f_{\text{med}}$	$f_{\min}$
0.1	1.75	1.68	1.51
0.2	1.62	1.56	1.42
0.3	1.50	1.46	1.35
0.4	1.40	1.37	1.28
0.5	1.31	1.29	1.22
0.6	1.24	1.22	1.17
0.7	1.17	1.15	1.12
0.8	1.11	1.10	1.07
0.9	1.05	1.05	1.04
1.0	1.00	1.00	1.00

Verifica-se que a dispersão dos valores de  $f$  ( $f_{\max}-f_{\min}$ ) diminui quando  $n$  aumenta e que os valores de  $f$  diminuem também quando  $n$  aumenta. Como seria de esperar, para  $n=1$ , a distribuição temporal da precipitação é uniforme e, portanto,  $f=1$ .

Ajustou-se a  $f=f_{\text{med}}(n)$  pelo método do mínimo dos quadrados, sem linearização, uma função do tipo  $f = a - n^b$  tendo-se obtido  $a=1.99$ ,  $b=0.513$  e  $r^2=0.999$  (entre  $f$  e  $f_{\text{med}}$ ), que arredondando os parâmetros  $a$  e  $b$  conduz a

$$f = 2 - \sqrt{n} \quad (20)$$

com o mesmo coeficiente de determinação entre  $f$  e  $f_{\text{med}}$ ,  $r^2=0.999$ . O erro relativo,  $(f_{\max}-f)/f$ , é inferior a cerca de 4%.

Ilustra-se na Figura 2, onde também se marcou  $f_{\max}$ ,  $f_{\text{med}}$  e  $f_{\min}$ , a relação obtida, Eq. (20).

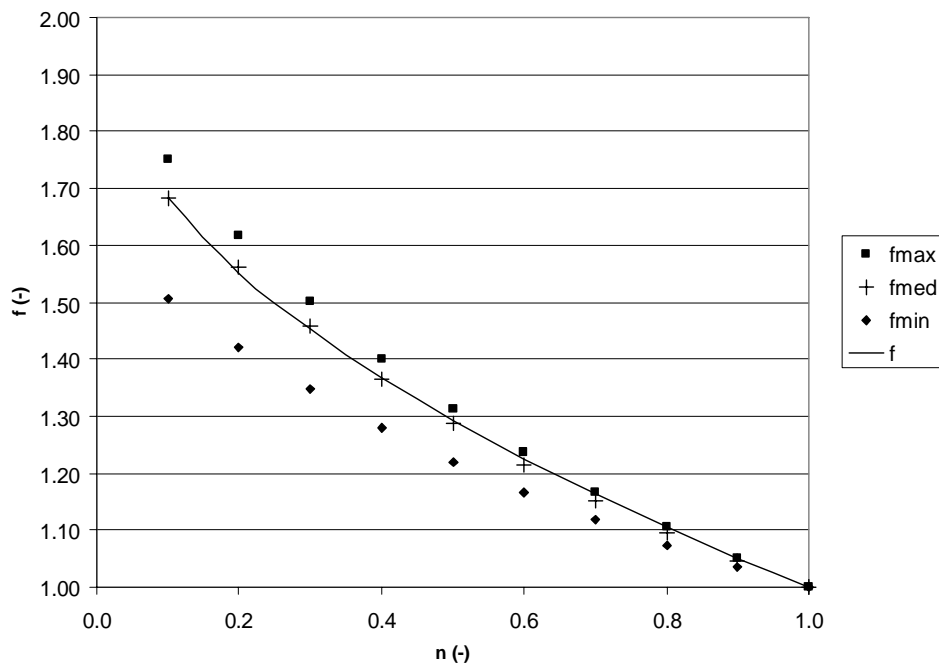


Figura 2 - Representação da Eq. (20) e de  $f_{\max}$ ,  $f_{\text{med}}$  e  $f_{\min}$

## 4 CONCLUSÃO

A fórmula racional é uma das de mais larga utilização na determinação de caudais de ponta de cheia em pequenas bacias hidrográficas para dimensionamento de órgãos de descarga ou de drenagem de águas pluviais. Ao longo do tempo, as apreciações críticas que lhe têm sido feitas conduzem à anterior restrição de aplicabilidade a pequenas bacias hidrográficas. Entre tais críticas encontra-se a não consideração da distribuição temporal e espacial da precipitação de modo distinto do uniforme, que apenas se pode justificar em pequenas bacias hidrográficas.

Nesta comunicação descreveu-se, à luz da teoria do hidrograma unitário e do conceito de linha de possibilidade udométrica, o efeito resultante da consideração de uma distribuição temporal não uniforme da precipitação.

Consideraram-se hidrogramas unitários triangulares, com o máximo em todas as posições temporais de ordenada não nula e vários intervalos temporais de discretização, e blocos de precipitação com várias durações, iguais ao intervalo de discretização do hidrograma unitário com que eram convoluídos, e vários valores do expoente  $n$  das linhas de possibilidade udométrica.

Considerando que o coeficiente C da fórmula racional traduz o efeito das perdas para o caudal de ponta de cheia, mostrou-se que

- para cada permutação admissível dos blocos de precipitação, a distribuição temporal dos blocos de precipitação que maximiza o caudal de ponta de cheia corresponde a uma sucessão temporal dos números de ordem não crescente que é simétrica da dos números de ordem não crescente das ordenadas do hidrograma unitário, em torno do menor número de ordem;
- para a distribuição temporal anterior, a duração total da precipitação que maximiza o caudal de ponta de cheia é pelo menos igual ao tempo de concentração da bacia hidrográfica;
- a razão f, entre os máximos caudais de ponta de cheia resultantes das distribuições temporais da precipitação com as condições de maximização anteriores e o caudal de ponta de cheia resultante de uma precipitação uniforme,
  - é praticamente independente da posição do máximo do hidrograma unitário triangular,
  - aumenta ligeiramente quando diminui o intervalo de tempo utilizado na discretização temporal,
  - aumenta quando diminui o expoente n da linha de possibilidade udométrica.

Com muito boa qualidade, ajustou-se à relação entre os valores do expoente n e os valores médios para cada n da razão f a seguinte função

$$f = 2 - \sqrt{n}$$

Assim, sugere-se que a fórmula racional com a consideração do efeito da distribuição não uniforme da precipitação passe a ser escrita

$$Q = f CIA$$

onde f é o factor de majoração e as restantes variáveis mantêm o significado tradicional.

## BIBLIOGRAFIA

CHOW, V. T.; D. R. MAIDMENT; L. W. MAYS – *Applied Hydrology*, McGraw-Hill, International Edition, 1988.

PILGRIM, D. H. - "Estimation of peak flows for small to medium size rural catchments", Book 4, Section 1, in *Australian Rainfall and Runoff, A Guide to Flood Estimation*, Volume 1, DH Pilgrim (ed), The Institution of Engineers, Australia, Barton, ACT, 1987.

PILGRIM, D. H.; I. CORDERY – "Flood Runoff ", in *Handbook of Hydrology*, D. R. Maidment (ed), McGraw-Hill, 1993.

QUINTELA, A. C. – *Hidrologia e Recursos Hídricos*, IST, 1996.

SHAW, E. - *Hydrology in Practice*, Van Nostrand Reinhold (Int.), 2<sup>nd</sup> Ed., 1988.